検定・推定

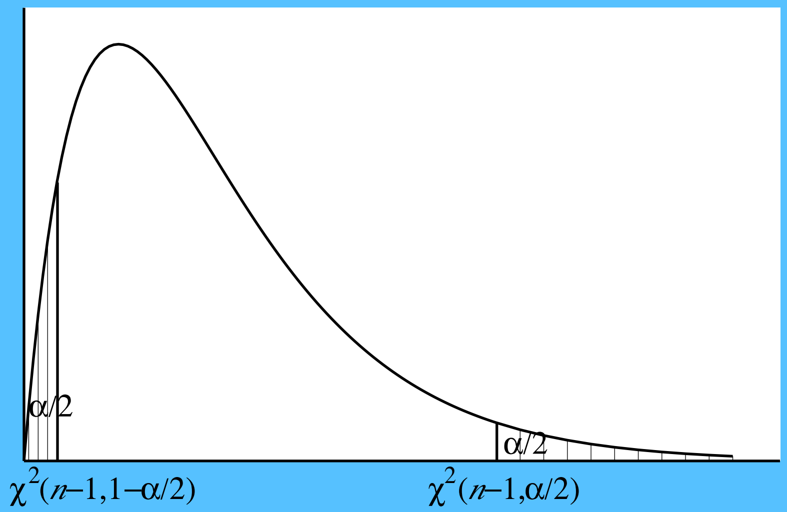
χ^2分布を用いた検定・推定
(母分散検定と区間推定)

母分散検定（両側検定）

母分散と母平均が未知であり、仮説H_0

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

とすると、両側検定の対立仮説H_1では



$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

となり、有意水準αで

$$\frac{S}{\sigma_0^2} > \chi^2(n-1, \alpha/2) \qquad \frac{S}{\sigma_0^2} < \chi^2(n-1, 1-\alpha/2)$$

のとき、仮説H_0は棄却される。 ここで、Sは平方和である。χ^2の関数値はχ^2分布表から求める。

母分散検定（右片側検定）

母分散と母平均が未知であり、仮説H_0

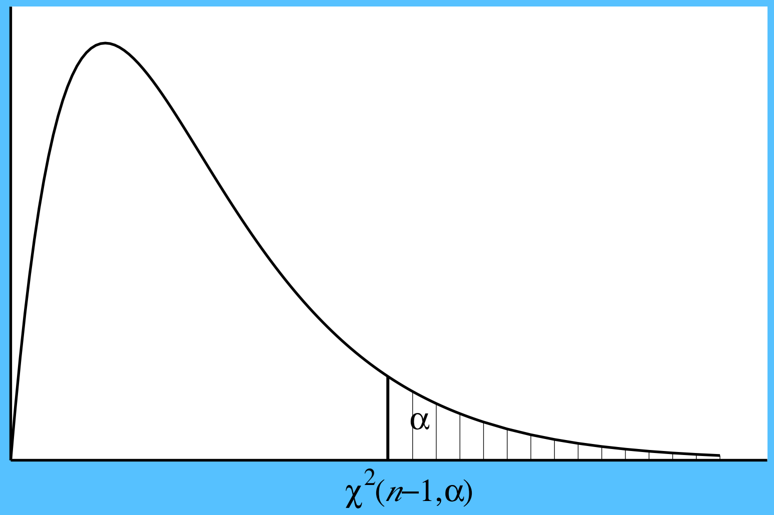
$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

とすると、右片側検定の対立仮説H_1では

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

となり、有意水準αで

$$\frac{S}{\sigma_0^2} > \chi^2(n-1, \alpha)$$



のとき、仮説H_0は棄却される。 ここで、Sは平方和である。χ^2の関数値はχ^2分布表から求める。

母分散検定（左片側検定）

母分散と母平均が未知であり、仮説H_0

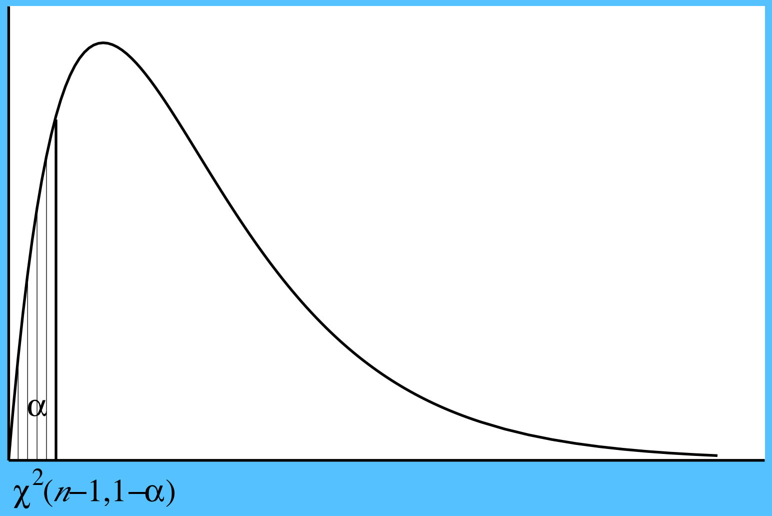
$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

とすると、左片側検定の対立仮説H_1では

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

となり、有意水準αで

$$\frac{S}{\sigma_0^2} < \chi^2(n-1, 1-\alpha)$$



のとき、仮説H_0は棄却される。 ここで、Sは平方和である。χ^2の関数値はχ^2分布表から求める。

母分散区間推定

信頼度(1-α)で、母分散σ^2は

$$\frac{S}{\chi^2(n-1,\alpha/2)} < \sigma^2 < \frac{S}{\chi^2(n-1,1-\alpha/2)}$$

の範囲内にある。 ここで、Sは平方和である。χ^2の関数値はχ^2分布表から求める。

例題

熟練者は製品のばらつきが小さい

新人A君の熟練度チェック

5.9 5.1 5.8 5.9 5.0 5.7 5.4 5.2

$(0.2)^2$未満であれば熟練者になっていると判断できるとする。有意水準0.05で検定しなさい。

母分散検定（右片側検定）

母分散と母平均が未知であり、仮説H_0

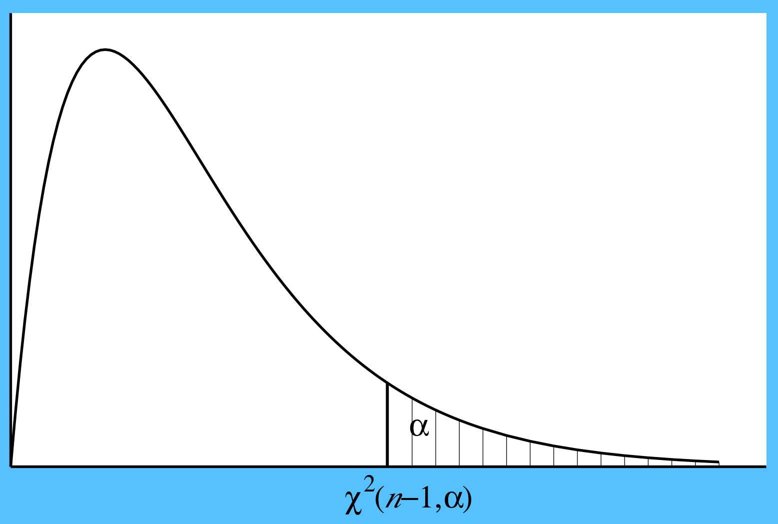
$$H_0 : \sigma^2 = (0.2)^2$$

とすると、右片側検定の対立仮説H_1では

$$H_1 : \sigma^2 > (0.2)^2$$

となり、有意水準0.05で

$$\frac{S}{(0.2)^2} > \chi^2(n-1, 0.05)$$



のとき、仮説H_0は棄却される。 ここで、Sは0.96で、nは8である。χ^2の関数値はχ^2分布表から求める。

$$\frac{S}{(0.2)^2} = \frac{0.96}{(0.2)^2} = 24.0$$

$$\chi^2(n-1,\alpha) = \chi^2(7,0.05) = 14.07$$

24.0>14.07なのでH_0は棄却され、A君は熟練者とは言い難い。

t分布を用いた検定・推定
(母平均検定と区間推定)

母平均検定（両側検定）

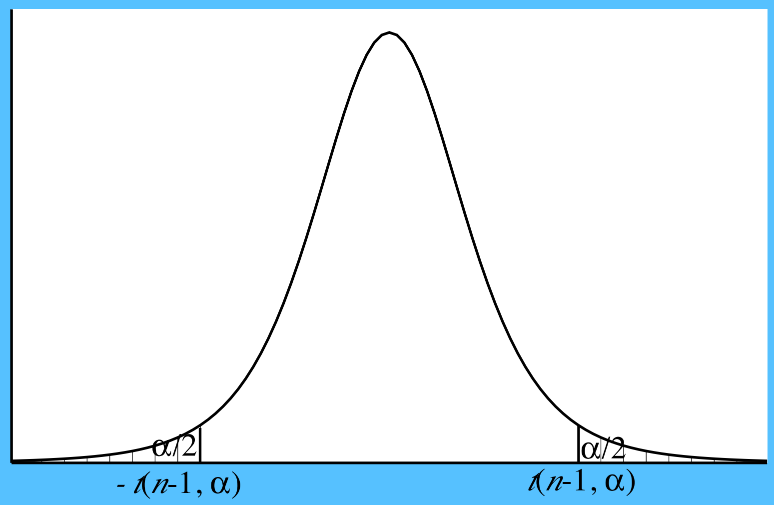
母分散と母平均が未知であり、仮説H_0

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

とすると、両側検定の対立仮説H_1では

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

となり、有意水準αで



$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2 / n}} \right| > t(n-1, \alpha)$$

のとき、仮説H_0は棄却される。ここでは$\bar{x}$は標本平均、s^2は標本分散で、nは標本データー数である。tの関数値はt分布表から求める。

母平均検定（右片側検定）

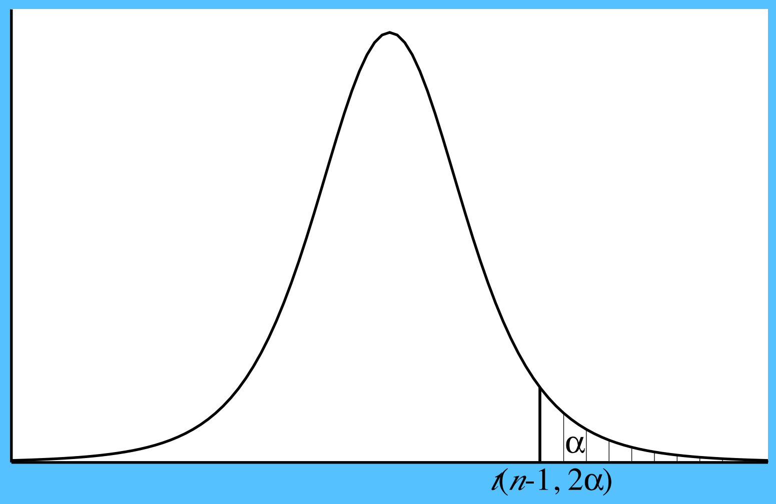
母分散と母平均が未知であり、仮説H_0

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

とすると、右片側検定の対立仮説H_1では

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

となり、有意水準αで



$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2 / n}} > t\left(n - 1, 2\alpha\right)$$

のとき、仮説H_0は棄却される。ここでは$\bar{x}$は標本平均、s^2は標本分散で、nは標本データー数である。tの関数値はt分布表から求める。

母平均検定（左片側検定）

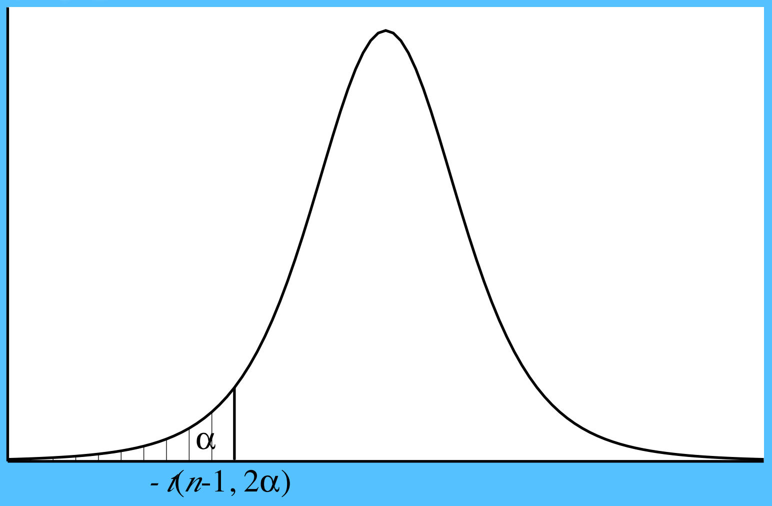
母分散と母平均が未知であり、仮説H_0

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

とすると、左片側検定の対立仮説H_1では

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

となり、有意水準αで



$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2 / n}} < -t\left(n-1, 2\alpha\right)$$

のとき、仮説H_0は棄却される。ここでは$\bar{x}$は標本平均、s^2は標本分散で、nは標本データー数である。tの関数値はt分布表から求める。

母平均区間推定

信頼度(1-α)で、母平均μは

$$\bar{x} - t(n-1,\alpha)\sqrt{\frac{s^2}{n}} < \mu < \bar{x} + t(n-1,\alpha)\sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

の範囲内にある。 ここで$\bar{x}$は標本平均で、s^2は標本分散で、nは標本データー数である。tの関数値はt分布表から求める。

例題

ある大学の男子水泳部員の肺活量（標本）

３７４０、３６８０、３８００、４１００

３７２０、３９００、３７００、４５００

３７８０、３８８０

肺活量が男子成人平均３７００mlより多いか？有意水準０．０５で判断せよ。

母平均検定（右片側検定）

母分散と母平均が未知であり、仮説H_0

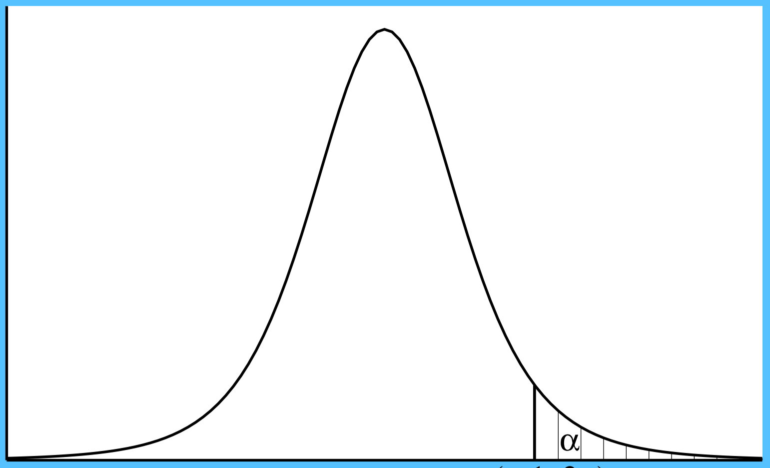
$$H_0 : \mu = 3700$$

とすると、右片側検定の対立仮説H_1では

$$H_1 : \mu > 3700$$

となり、有意水準αで

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2 / n}} > t(n-1, 2\alpha)$$



のとき、仮説H_0は棄却される。ここでは$\bar{x}$は標本平均3880、s^2は標本分散251.0^2で、nは標本データー数10である。tの関数値はt分布表から求める。

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{s^2/n}} = \frac{3880-3700}{\sqrt{\frac{251.0^2}{10}}} = 2.267$$

$$t(n-1, 2\alpha) = t(9, 0.1) = 1.833$$

２．２６７＞１．８３３なのでH_0は棄却され、

水泳部員の肺活量は一般人よりも大きいと思われる。

F分布を用いた検定・推定

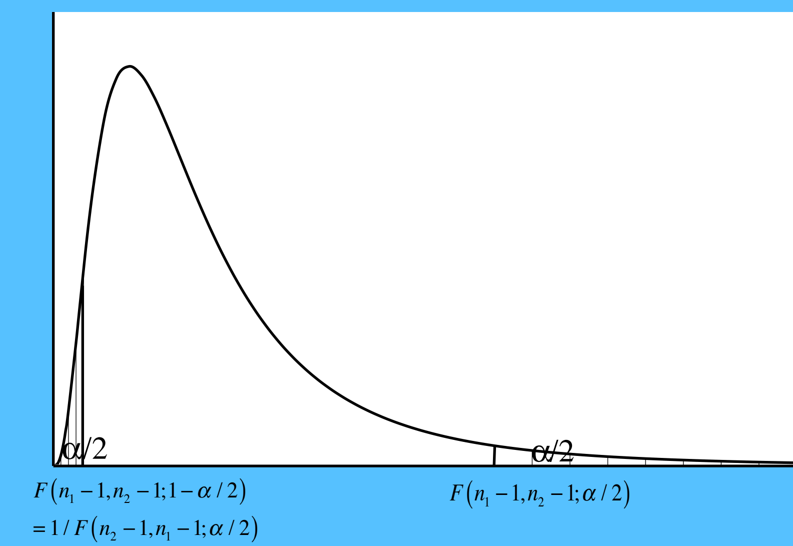
(等分散検定)

等分散検定

仮説H_0, H_1を

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2,\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

とすると、有意水準αで



$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{1}{F(n_2-1, n_1-1; \alpha/2)} \qquad \frac{s_1^2}{s_2^2} > F(n_1-1, n_2-1; \alpha/2)$$

のとき、仮説H_0は棄却される。ここでs^2は標本分散である。Fの関数値はF分布表から求める。

→等分散と判断された場合、母平均差の議論へ

F分布の公式

$$F\left(n_1-1, n_2-1; 1-\alpha/2\right) = \frac{1}{F\left(n_2-1, n_1-1; \alpha/2\right)}$$

母平均差区間推定

信頼度(1-α)で、母平均差μ1ーμ2は

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t(n_1 + n_2 - 2, \alpha)\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left(\frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2 - 2}\right)} <$$

$$\mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t(n_1 + n_2 - 2, \alpha)\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left(\frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2 - 2}\right)}$$

で与えられる値の範囲内にある。ここで$\bar{x}$は標本平均で、Sは平方和で、nは標本データー数である。tの関数値はt分布表から求める。

例題

A社のバッテリー（標本）

３．６、３．４、３．７、３．３、３．０

B社バッテリー（標本）

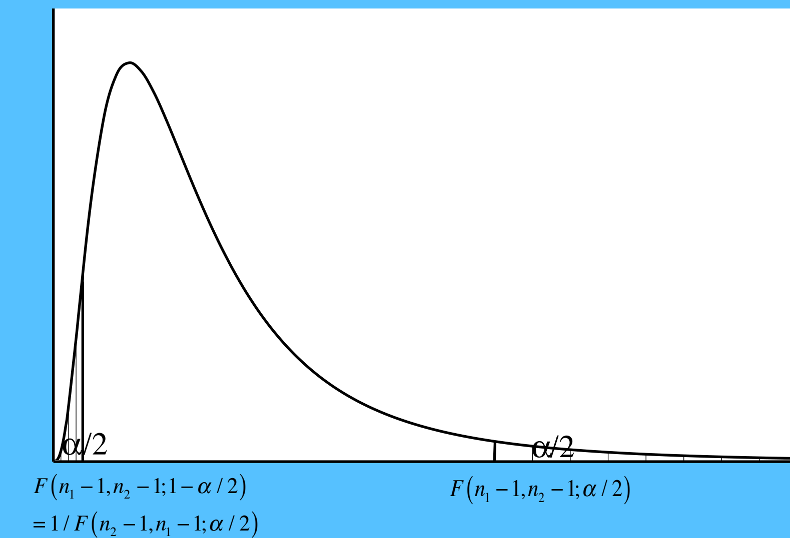
１．８、１．６、１．９、１．４、１．３

その差はいかなるものか？

等分散検定

仮説H_0, H_1を

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2,\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$



とすると、有意水準αで

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{1}{F\left(n_2-1,n_1-1;\alpha/2\right)} \qquad \frac{s_1^2}{s_2^2} > F\left(n_1-1,n_2-1;\alpha/2\right)$$

のとき、仮説H_0は棄却される。ここでs^2は標本分散である。Fの関数値はF分布表から求める。

$$n_1 = 5,\ n_2 = 5$$

$$\bar{x}_1 = 3.4,\ \bar{x}_2 = 1.6$$

$$s_1^2 = 0.075,\ s_2^2 = 0.065$$

$$S_1 = 0.3,\ S_2 = 0.26$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.154$$

$$\frac{1}{F(n_2 - 1, n_1 - 1; \alpha / 2)} = \frac{1}{F(4, 4; 0.025)} = \frac{1}{9.60} = 0.104$$

$$F(n_1 - 1, n_2 - 1; \alpha / 2) = F(4, 4; 0.025) = 9.60$$

０．１０４＜１．１５４＜９．６０なのでH_0は棄却されず、母分散は等しいと考えられる。
そこで、両者の母平均の比較は意味を有する。

信頼度(1-α)で、母分散差μ₁ーμ₂は

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-t(n_1+n_2-2,\alpha)\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\left(\frac{S_1+S_2}{n_1+n_2-2}\right)}<$$

$$\mu_1-\mu_2<\bar{x}_1-\bar{x}_2+t(n_1+n_2-2,\alpha)\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\left(\frac{S_1+S_2}{n_1+n_2-2}\right)}$$

で与えられる値の範囲内にある。 ここで$\bar{x}$は標本平均で、Sは平方和で、 nは標本データー数である。 tの関数値はt分布表から求める。

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-t(n_1+n_2-2,\alpha)\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\left(\frac{S_1+S_2}{n_1+n_2-2}\right)}=3.4-1.6-t(8,0.05)\sqrt{\frac{2}{5}\left(\frac{0.3+0.26}{8}\right)}=1.8-2.306\sqrt{\frac{2}{5}\left(\frac{0.3+0.26}{8}\right)}=1.41$$

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2+t(n_1+n_2-2,\alpha)\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\left(\frac{S_1+S_2}{n_1+n_2-2}\right)}=3.4-1.6+t(8,0.05)\sqrt{\frac{2}{5}\left(\frac{0.3+0.26}{8}\right)}=1.8+2.306\sqrt{\frac{2}{5}\left(\frac{0.3+0.26}{8}\right)}=2.19$$

$$1.41<\mu_1-\mu_2<2.19$$