気体分子運動（マクスウェル-ボルツマン分布）

静岡大学工学部機械工学科　岡本　正芳

気体分子運動理論.1　序論

○「気体分子がどんな運動をしているか」を統計力学の観点から考えていく。

○ターゲットは気体分子の速度とする。つまり確率変数は速度３成分である。

○「気体分子には力が作用していない」と「運動が等方的である」という２つの仮定だけを考慮する。

○以上の仮定と数学および物理学だけでアドホックな概念は一切利用しない。

気体分子運動理論.2　デカルト座標系

外力なしで等方的で自由に運動する気体分子を考える

速度空間での確率密度関数を定義　$f(u)$

等方性の仮定　　他の速度成分も同じ確率密度関数に支配されている

以下の範囲の速度が現れる確率

$$u+\Delta u \sim u,\ v+\Delta v \sim v,\ w+\Delta w \sim w$$

$$\int_u^{u+\Delta u} du' \int_v^{v+\Delta v} dv' \int_w^{w+\Delta w} dw' f(u') f(v') f(w')$$

$$\approx f(u) f(v) f(w) \Delta u \Delta v \Delta w$$

気体分子運動理論.3　座標変換

デカルト直交座標系と３次元極座標系の間の座標変換を考える。

方位角による表現

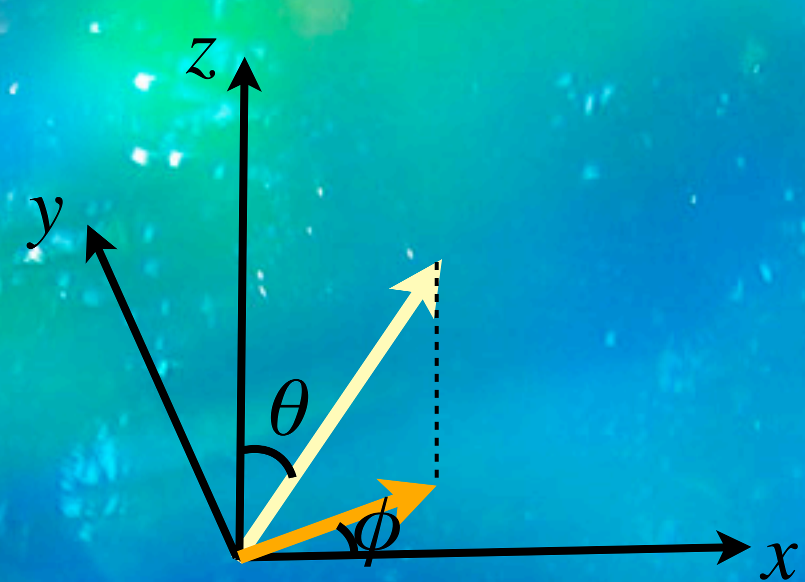
$$u = q\sin\theta\cos\phi$$

$$v = q\sin\theta\sin\phi$$

$$w = q\cos\theta$$

速度の大きさ

$$q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$



気体分子運動理論.4　３次元極座標系

外力なしで等方的で自由に運動する気体分子を考える

等方性の仮定　　方位角に依存しない

絶対値速度空間での確率密度関数を定義　$F(q)$

以下の範囲の速度が現れる確率

$$u + \Delta u \sim u,\ v + \Delta v \sim v,\ w + \Delta w \sim w$$

$$\approx F(q)\Delta u \Delta v \Delta w$$

気体分子運動理論.5

$$f(u)f(v)f(w)\cancel{\Delta u\Delta v\Delta w}=F(q)\cancel{\Delta u\Delta v\Delta w}$$

対数をとる

$$\log f(u)f(v)f(w)=\log F(q)$$

速度uで微分

$$\frac{\partial}{\partial u}\ln f(u)f(v)f(w)=\frac{\partial}{\partial u}\ln f(u)=\frac{1}{f(u)}\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\ln F(q)=\frac{1}{F(q)}\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial u}=\frac{u}{q}\frac{1}{F(q)}\frac{\partial F}{\partial q}$$

気体分子運動理論.6

$$\frac{1}{q}\frac{1}{F(q)}\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{1}{u}\frac{1}{f(u)}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{1}{v}\frac{1}{f(v)}\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{1}{w}\frac{1}{f(w)}\frac{\partial f}{\partial w}=\text{const}$$

$$\frac{1}{u}\frac{1}{f(u)}\frac{\partial f}{\partial u}=-2\gamma$$

$$\frac{df}{du}=-2\gamma uf$$ 解 $$f=A\exp\left(-\gamma u^2\right)$$

Aとγを決定する必要がある。

気体分子運動理論.7　数学・物理学の導入

確率密度関数の規格化条件（数学）

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} du\, f$$

k_B：ボルツマン定数

T：温度

温度の定義（物理）

$$\frac{1}{2} m\overline{u^2} = \frac{1}{2} k_B T$$

$$A = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$\gamma = \frac{m}{2k_B T}$$

気体分子運動理論.8　結果

気体分子速度の１次元確率密度関数

$$f(u)=\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_B T}\right)$$

平均μゼロ、分散σ²=k_BT/m

気体分子速度の３次元確率密度関数

$$f(u,v,w)=\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m(u^2+v^2+w^2)}{2k_B T}\right)$$