MASAYOSHI OKAMOTO

ホドグラフ法

ホドグラフ法とは

- ルジャンドル変換により独立変数と従属変数を変換して、微分で記述された支配方程式の非線形性を回避する方法
- 速度と位置の変換

ルジャンドル変換（速度→位置）

速度ポテンシャルの全微分

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = udx + vdy = d\left(xu + yv\right) - xdu - ydv$$

$$d\left(xu + yv - \Phi\right) = xdu + ydv$$

新たなポテンシャルの定義

$$\Upsilon = xu + yv - \Phi$$

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial u} = x \qquad \frac{\partial \Upsilon}{\partial v} = y$$

変数変換．１（速度極座標へ）

速度変換式

$$u = q\cos\theta \qquad v = q\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -q\sin\theta \\ \sin\theta & q\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq \\ d\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dq \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{1}{q}\sin\theta & \dfrac{1}{q}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

変数変換. 2 （速度極座標へ）

位置方程式

$$x = \frac{\partial \Upsilon}{\partial u} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial u} = \cos\theta \frac{\partial \Upsilon}{\partial q} - \frac{\sin\theta}{q}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta}$$

$$y = \frac{\partial \Upsilon}{\partial v} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial v} = \sin\theta \frac{\partial \Upsilon}{\partial q} + \frac{\cos\theta}{q}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta}$$

位置と極速度の全微分の関係式

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin\theta}{q^2}\frac{\partial \Upsilon}{\partial q} + \cos\theta \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q^2} - \frac{\sin\theta}{q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} & -\sin\theta \frac{\partial \Upsilon}{\partial q} - \frac{\cos\theta}{q}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta} + \cos\theta \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} - \frac{\sin\theta}{q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} \\ -\frac{\cos\theta}{q^2}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta} + \sin\theta \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q^2} + \frac{\cos\theta}{q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} & \cos\theta \frac{\partial \Upsilon}{\partial q} - \frac{\sin\theta}{q}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta} + \sin\theta \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} + \frac{\cos\theta}{q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq \\ d\theta \end{pmatrix}$$

変数変換（速度極座標へ）

行列式

$$\det \mathbf{A} = \left(\frac{\sin\theta}{q^2}\frac{\partial \Upsilon}{\partial q} + \cos\theta \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q^2} - \frac{\sin\theta}{q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} \right)$$

$$\times \left(\cos\theta \frac{\partial \Upsilon}{\partial q} - \frac{\sin\theta}{q}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta} + \sin\theta \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} + \frac{\cos\theta}{q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} \right)$$

$$- \left(-\frac{\cos\theta}{q^2}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta} + \sin\theta \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q^2} + \frac{\cos\theta}{q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} \right)$$

$$\times \left(-\sin\theta \frac{\partial \Upsilon}{\partial q} - \frac{\cos\theta}{q}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta} + \cos\theta \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} - \frac{\sin\theta}{q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} \right)$$

$$= \frac{\partial \Upsilon}{\partial q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q^2} - \frac{1}{q}\left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{q^2}\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{2}{q^2}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} + \frac{1}{q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q^2}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} \neq 0$$

オイラー連続方程式（定常性を仮定）

$$0 = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left\{ \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial q} + \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial \rho q}{\partial q} + \rho q \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q^2} + \left(\frac{1}{q} \frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q \partial \theta} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right\}$$

この方程式は行列式が非ゼロであれば
新たなポテンシャル関数の微分方程式

その他連立させる方程式

ベルヌーイの定理

$$\frac{q^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a_*^2$$

気体の状態方程式
断熱

$$p=\rho^\gamma \exp\left(\frac{S-S_0}{C_V}\right)$$

音速の定義

$$a^2=\frac{\partial p}{\partial \rho}$$

上３式から音速を消去して密度を解くと

$$\rho=\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}a_*^2-\frac{\gamma-1}{2\gamma}q^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left(-\frac{S-S_0}{C_V(\gamma-1)}\right)$$

密度

$$\rho = \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} a_*^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} q^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \exp\left(-\frac{S-S_0}{C_V\left(\gamma-1\right)} \right)$$

密度の解は速度の大きさのみに依存する。

方位角には依存しない

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial q} + \frac{1}{q}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial \rho q}{\partial q} + \rho q \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial q^2} = 0$$

最終的なポテンシャル方程式

$$q\frac{\partial \Upsilon}{\partial q}+\left\{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{q^2}{a_*^2}\right\}\left(1-\frac{q^2}{a_*^2}\right)^{-1}q^2\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial q^2}+\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\theta^2}=0$$

これは単純な線形偏微分方程式にすぎない。

Ringleb解　$\Phi=\dfrac{C\rho_0}{\rho q}\cos\theta$　$\Psi=\dfrac{C}{q}\sin\theta$

非線形性は境界条件の設定に移行されているので常に単純に解析を実行できるわけではない。